El hotel de Hilbert

... Pero a lo que íbamos: el hotel de Hilbert tiene infinitas habitaciones, numeradas 1, 2, 3, 4, etc., es decir, todos los números positivos.

Un fin de semana de puente, el hotel estaba al completo. Un viajero sin reserva se acercó a la habitación y pidió una habitación. En cualquier hotel finito, por grande que fuese, el viajero no habría tenido suerte, pero estamos en el hotel de Hilbert
-- No hay problema, caballero, dijo el director. Pediré a la persona de la habitación uno que se mueva a la 2. La persona de la habitación dos, que se mueva a la tres, la 3 a la 4, etc. La que esté en la posición n se moverá a la n+1. De este modo la habitación 1 quedará libre para usted.

Este truco funciona en un hotel infinito. En un hotel finito no, porque la persona que ocupa la habitación con el número más alto se queda sin sitio donde ir, pero en el hotel de Hilbert no existe una habitación con el número más alto. Problema resuelto.

Diez minutos más tarde llega un enorme autobús de Infinite Tours, con infinitos viajeros sentados en los asientos 1,2,3,4...
--Bueno, no os puedo acomodar pidiendo a mis huéspedes que se trasladen unos cuantos lugares hacia arriba, dijo el director, aunque se trasladasen un millón de lugares, eso solo dejaría libre un millón de habitaciones.
Lo pensó unos momentos.
-- Pero de todos modos puedo acomodarlos. Pediré a la persona de la habitación 1 que se mueva a la 2, la de la 2 a la 4, la de la 3 a la 6 etc. La persona de la habitación n se moverá a la 2n. Eso dejará libres todas las habitaciones impares, que son infinitas, así que puedo acomodar a la persona del asiento 1 del autobús en el asiento 1, la del asiento 2 en la habitación 3,etc. Asunto arreglado.

Sin embargo los problemas del director no habían acabado aún. Diez minutos más tarde contemplaba con espanto como una infinidad de enormes autobuses llegaban a su infinito aparcamiento con infinitos pasajeros cada uno.
El director del hotel salió a recibirlos de inmediato.
--Estamos completos, dijo, pero aún puedo acomodarlos a todos.
--¿Cómo? Preguntó el chofer del autobús número 1.
--Es fácil....

David Hilbert, a finales del siglo XIX, ilustró con su famoso ejemplo del hotel las propiedades del infinito, que se conocían desde siglos antes:

$\infty + 1 = \infty$

$\infty + \infty = \infty$

$\infty - \infty = \infty$

Es decir, no hay diferentes grados de infinito..

Sin embargo, George Cantor, contemporáneo de Hilbert, demostró que no había un solo tamaño de infinitos, sino muchos.
Lo hizo apoyándose en la teoría de conjuntos, que era bastante novedosa, aplicando el concepto de conjunto potencia (el conjunto de los subconjuntos de un conjunto).
Teorema de Cantor, 1874: El conjunto potencia de un conjunto infinito no es igual de infinito, ni un poco mayor, sino infinitamente mayor que él. Otra nueva clase de infinito.
Y claro, el conjunto potencia de un conjunto potencia genera a su vez una tercera clase de infinito, y luego una cuarta clase… Una escalera infinita de peldaños infinitamente separados entre sí.

---Pero entonces llegó Bertrand Russell, y encontró una grieta en la teoría de conjuntos de Cantor, y se dispuso a desmontarla por completo basándose en un conjunto un poco especial, R: el conjunto de todos los conjuntos comunes.
Primero distinguió entre dos clases de conjuntos: los comunes, que no se incluyen a sí mismos, y los exóticos, que sí se incluyen a sí mismos.
¿De qué clase es R, el conjunto de todos los conjuntos comunes?
No puede ser exótico, porque en ese caso se incluiría a sí mismo, es decir que incluiría a uno exótico, y eso contradice a la definición de R.
Pero tampoco puede ser común, porque incluye a TODOS los conjuntos comunes, y si lo hace será exótico, porque se incluye a sí mismo.

Para ayudar a comprender esta contradicción la resumió en la conocida paradoja del barbero, y de ese modo tan sencillo se cargó buena parte de la teoría de conjuntos de Cantor y de Frege, que en esos momentos terminaba una monumental obra "los fundamentos de la aritmética" basada en la teoría de conjuntos.

Cómo contar hasta el infinito. Richard Elwes. Ariel.
La cuadratura del cuadrado. Ian Stewart. Edit Crítica. Pag 171